

11. ÜBUNGSBLATT
Prof. Stefan Friedl PhD

Abgabe spätestens bis *Donnerstag den 16. Januar* um 12 Uhr.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Abbildung $z \mapsto z^3$ auf keinem Teilgebiet von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$ (mit der üblichen Euklidischen Metrik) ist.

Aufgabe 2. Es sei $\{\varphi_i: U_i \rightarrow V_i\}_{i \in I}$ ein Atlas für eine Mannigfaltigkeit M . Wir nehmen an, dass für alle $i, j \in I$ der Kartenwechsel

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{(\varphi_i|_{U_i \cap U_j})^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j|_{U_i \cap U_j}} \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

eine Isometrie ist. Für $P \in M$ und $v, w \in T_P M$ definieren wir

$$g_P(v, w) := g_{\varphi_i(P)}(d_P \varphi_i(v), d_P \varphi_i(w)),$$

wobei φ_i eine Karte um P ist. Zeigen Sie, dass $P \mapsto g_P$ wohl-definiert ist, d.h. dass diese Zuordnung nicht von der Wahl von i abhängt.

Aufgabe 3. Wir hatten auf $\mathbb{R}P^2$ eine Riemannsche Metrik eingeführt, welche lokal isometrisch zur sphärischen Metrik auf S^2 ist.

- (1) Zeigen Sie, dass für (genügend kleine) Dreiecke auf $\mathbb{R}P^2$ gilt

$$\text{Winkelsumme} = \pi + \text{Fläche}.$$

- (2) Zeigen Sie: Zu je zwei Punkten P und Q auf $\mathbb{R}P^2$ und je zwei Vektoren $v \in T_P \mathbb{R}P^2$ und $w \in T_Q \mathbb{R}P^2$ mit $\|v\| = \|w\|$ gibt es eine Isometrie h von $\mathbb{R}P^2$ mit $h(P) = Q$ und $d_P h(v) = w$.
- (3) Bestimmen Sie die Fläche von $\mathbb{R}P^2$.

Aufgabe 4. Wir betrachten nun

$$M := \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] / \sim$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation mit $(x, \frac{1}{2}) \sim (x, -\frac{1}{2})$ und $(-\frac{1}{2}, y) \sim (\frac{1}{2}, -y)$ ist.

- (1) Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.
- (2) Zeigen Sie, dass M eine euklidische Metrik besitzt.